**Középiskolai MTA Alumni program az Orosházi Táncsics Mihály Gimnázium és Kollégiumban**

**Dr. Fodor Ferenc: Az elveszett térfogat nyomában**

A Középiskolai MTA Alumni Program keretében 2024. 05. 31-én, pénteken előadást tartott az Orosházi Táncsics Mihály Gimnázium és Kollégiumban a matematika munkaközösség közreműködésével és Seres Erzsébet szervezésében Dr. Fodor Ferenc, egyetemi tanár, a Szegedi Tudományegyetem Természettudományi és Informatikai Kar, Bolyai Intézet intézetvezetője, Geometria Tanszék tanszékvezetője (munkáltatója: Szegedi Tudományegyetem, 6720 Szeged, Dugonics tér 13., lakhely települése: Szeged).

Az eladás címe Az elveszett térfogat nyomában volt. Az előadás 45 perces volt, 9.15-tól – 10.00-ig tartott. Az előadáson az iskola 11. évfolyamos tanulói (kb. 20 fő) és jelenlegi tanárai vettek részt.

Az előadásban azt a kérdést vizsgáltuk, hogy milyen sűrűséggel lehet a síkot és a (3-dimenziós) teret kitölteni egy konvex test egybevágó példányaival (vagy mennyi terület/térfogat „vész el”, marad kitöltetlenül). A konvex testek közül a körre (és térben a gömbre) koncentráltunk. A kérdés pontos megfogalmazásához szükséges a sűrűség többé-kevésbé szabatos bevezetése, ami lehetséges középiskolás matematikai eszközökkel is.

Az előadás első felében először a síkbeli esetet tárgyaljuk, ezen belül is az elemi eszközökkel jól megközelíthető rácsszerű pakolásokat. Egy geometriai rács pontjai köré írt olyan maximális sugarú (egybevágó) köröket tekintünk, amelyek nem fednek át. Megmutatjuk, hogy olyan rácsban, amely fundamentális paralelogrammájának területe 1 (egységrács v. unitér rács) mindig van két olyan pont, ami legfeljebb egy, a rácstól független, fix távolságra van egymástól. Így ennek az értéknek a felénél nagyobb sugarú köröket a rácspontok köré nem lehet írni anélkül, hogy átfedjenek. Ennek segítségével kimutatjuk, hogy egybevágó körlapok rácsszerű elhelyezésének sűrűsége nem haladhatja meg a $\pi/\sqrt{12}$-t. Ezt az értéket a szabályos hatszögrács el is éri. Thue norvég matematikus bizonyította először, hogy ha eltekintünk a rácsszerű pakolástól és a körök középpontjai bárhol lehetnek, akkor sem lehet ennél magasabb sűrűséget elérni. Fejes Tóth László adott Thue eredményére egy nagyon szép, elegáns alternatív bizonyítást.

A kérdés háromdimenziós változata Kepler-probléma néven vált ismertté. Johannes Kepler 1611-es művében feltette a kérdést, hogy milyen sűrűséggel lehet a teret kitölteni egybevágó gömbökkel. A sejtés az volt, hogy a maximális sűrűséget az ún. lapcentrált kockarács adja. A Kepler-sejtés rácsszerű változatát Gauss oldotta meg. Bebizonyította, hogy egybevágó gömbök rácsszerű pakolásának sűrűsége nem haladhatja meg a $\pi/\sqrt{18}$-at, ami éppen a lapcentrált kockarács sűrűsége. A kérdést végül Thomas Hales amerikai matematikus zárta le 1998-ban, amikor Samuel Ferguson nevű diákjával igazolta a Kepler-sejtést. Gondolatmenetük Fejes Tóth László korábbi ötletére támaszkodik és számítógépet is használ. A lapcentrált kockarács szerkezetét narancsokkal szemléltetjük az előadásban. Végül megemlítjük, hogy 2022-ben Maryna Viazovska kapta a Fields-érmet, mert megoldotta a gömbpakolási probléma 24-dimenziós változatát.

Szöveg: Dr. Fodor Ferenc

Kép: Nagyné Dömötör Márta