

**Középiskolai MTA Alumni program az Orosházi Táncsics Mihály Gimnázium és  
Kollégiumban**

**Dr. Fodor Ferenc: Tetraéderek és a tér kitöltése**

A Középiskolai MTA Alumni Program keretében 2024. 05. 31-én, pénteken előadást tartott az Orosházi Táncsics Mihály Gimnázium és Kollégiumban a matematika munkaközösség közreműködésével és Seres Erzsébet szervezésében Dr. Fodor Ferenc, egyetemi tanár, a Szegedi Tudományegyetem Természettudományi és Informatikai Kar, Bolyai Intézet intézetvezetője, Geometria Tanszék tanszékvezetője (munkáltatója: Szegedi Tudományegyetem, 6720 Szeged, Dugonics tér 13., lakhely települése: Szeged).

Az előadás címe Tetraéderek és a tér kitöltése volt. Az előadás 45 perces volt, 8.20-tól – 9.05-ig tartott. Az előadáson az iskola 11. évfolyamos tanulói (kb. 20 fő) és jelenlegi tanárai vettek részt.

Arisztotelész az *Égboltról* című munkájában azt állította (tévesen), hogy szabályos tetraéderekkel ki lehet tölteni (hézagmentesen és átfedés nélkül) a háromdimenziós teret. Ezt a tévedést, a magyar kötődéssel is rendelkező Regiomontanus (Johannes Müller von Königsberg, 1436–1476) tette szóvá a 15. században.

Az előadásban először megvizsgáljuk a sík szabályos sokszögekkel való parkettázásait, építve a középiskolás geometria ismeretekre. Konkrétan megmutatjuk, hogy konvex szabályos mozaik csak háromféle létezik: háromszög, négyzet és hatszög, illetve, hogy ha elengedjük a konvexitás feltételét és megengedünk szabályos csillagsokszögeket is, akkor ilyen parkettázás nem létezik.

Az előadás második részében megmutatjuk, hogy egybevágó szabályos tetraéderekkel nem lehet a (3-dimenziós) teret hézagmentesen és átfedés nélkül kitölteni, mert a szabályos tetraéder lap- és térszögei nem racionális többszöröse  $\pi$ -nek. A gondolatmenet egy „Könyvbeli” bizonyítás, Erdős Pál szavaival élve. A lapszögekre koncentrálnunk, hiszen a tetraéder egyik csúcsa köré írt gömbfelületből kivágott szabályos gömbháromszög szögei éppen a lapszögek, és Girard tétele alapján területe a gömbháromszög szögdefektusa, ami háromszor a tetraéder lapszöge mínusz  $\pi$ . A lapszögekre vonatkozó bizonyítás használja a koszinusz függvény egy nevezetes azonosságát (egy szög  $n$ -szeresének koszinuszára vonatkozó formulát), egyszerű oszthatósági tulajdonságokat, és a binomiális együtthatók egyes azonosságait. Szemléltetésképpen a *Zome tool* nevű amerikai gyártmányú geometriai modell készlet segítségével a diákok saját kézzel összerakhatnak egy tetraédert, ami elsőre nem nyilvánvaló és némi kezűgyességet igényel. Ez segít a térlátásuk fejlesztésében. Említésre kerül, hogy a fenti,

ókorból származó kérdésnek van mai, modern, megoldatlan folyománya is: nem ismert, hogy egybevágó szabályos tetraéderekkel milyen sűrűségben lehet a 3-dimenziós teret kitölteni. Csak alsó és felső becslések ismertek, amelyek meglehetősen messze vannak egymástól. A legjobb alsó becslés valamivel nagyobb, mint  $0,85$ , míg az ismert legerősebb felső becslés nagyságrendileg mindössze kb.  $10^{-25}$ -el kisebb, mint  $1$ .

Szöveg: Dr. Fodor Ferenc

Képek: Seres Erzsébet







